قواعد الاشتقاق

الرقم	الاقتران $f(x)$	مشتقة الاقتران $f'(x)$
1	$f(x) = a$, a ثابت	$f'(x) = 0$
2	$f(x) = ax^{n}$, a ثابت	$f'(x) = anx^{n-1}$
3	$f(x) = ax + b$, a, b ثابتان	$f'(x) = a$
4	$f(x) = ax^{2}$, a ثابت	$f'(x) = 2ax$
5	$f(x) = ag(x)$, a ثابت	$f'(x) = ag'(x)$
6	$f(x) = g(x) \pm h(x)$	$f'(x) = g'(x) \pm h'(x)$
7	$f(x) = g(x) \times h(x)$	$f'(x) = \left(g'(x)h(x)\right) + \left(g(x)h'(x)\right)$
8	$f(x) = \dfrac{g(x)}{h(x)}$	$f'(x) = \dfrac{\left(g'(x)h(x)\right) - \left(g(x)h'(x)\right)}{(h(x))^{2}}$
9	$f(x) = \dfrac{1}{h(x)}$, (حالة خاصة من القاعدة 8, $f(x)$ معكوس $h(x)$)	$f'(x) = \dfrac{-h'(x)}{(h(x))^{2}}$
10	$f(x) = \dfrac{a}{h(x)}$, a ثابت (حالة خاصة من القاعدة 8)	$f'(x) = \dfrac{-ah'(x)}{(h(x))^{2}}$
11	$f(x) = (g(x))^{n}$ or $g^{n}(x)$	$f'(x) = n(g(x))^{n-1}\, g'(x)$
12	$f(x) = \sqrt{h(x)}$	$f'(x) = \dfrac{h'(x)}{2\sqrt{h(x)}}$
13	$f(x) = \sqrt[n]{h(x)}$	$f'(x) = \dfrac{h'(x)}{n\sqrt[n]{(h(x))^{n-1}}}$
14	$f(x) = \sin(x)$	$f'(x) = \cos(x)$
15	$f(x) = \tan(x)$	$f'(x) = \sec^{2}(x)$ or $(\sec(x))^{2}$
16	$f(x) = \sec(x)$	$f'(x) = \sec(x)\tan(x)$
17	$f(x) = \cos(x)$	$f'(x) = -\sin(x)$
18	$f(x) = \cot(x)$	$f'(x) = -\csc^{2}(x)$ or $(\csc(x))^{2}$
19	$f(x) = \csc(x)$	$f'(x) = -\csc(x)\cot(x)$
20	$f(x) = \sin^{n}\left(g(x)\right) or \left(\sin\left(g(x)\right)\right)^{n}$ تطبق هذه القاعدة على جميع الاقترانات المثلثية	$f'(x) = n\sin^{n-1}\left(g(x)\right)\sin'\left(g(x)\right)g'(x)$ $= n\sin^{n-1}\left(g(x)\right)\cos\left(g(x)\right)g'(x)$
21	$f(x) = y = e^{x}$, e العدد النيبيري	$f'(x) = y' = e^{x}$
22	$f(x) = y = e^{g(x)}$, e العدد النيبيري	$f'(x) = y' = e^{g(x)}g'(x) = g'(x)e^{g(x)}$
23	$f(x) = y = a^{x}$, a ثابت	$f'(x) = y' = a^{x}\ln a$
24	$f(x) = y = a^{g(x)}$, a ثابت	$f'(x) = y' = a^{g(x)}g'(x)\ln a$ $= g'(x)a^{g(x)}\ln a$
25	$f(x) = y = \ln(x)$	$f'(x) = y' = \dfrac{1}{x}$
26	$f(x) = y = \ln(g(x))$	$f'(x) = y' = \dfrac{g'(x)}{g(x)}$
27	$f(x) = y = \log(x)$	$f'(x) = y' = \dfrac{1}{x\ln 10}$
28	$f(x) = y = \log_{a}(x)$	$f'(x) = y' = \dfrac{1}{x\ln a}$
29	$f(x) = y = \log(g(x))$	$f'(x) = y' = \dfrac{g'(x)}{g(x)\ln 10}$
30	$f(x) = y = \log_{a}(g(x))$	$f'(x) = y' = \dfrac{g'(x)}{g(x)\ln a}$
31	$f(x) = hog(x) = h(g(x))$	$f'(x) = h'\left(g(x)\right)g'(x)$

المشتقات العليا وقاعدة السلسلة والمعادلة الوسيطة والاشتقاق الضمني

قاعدة السلسلة

$y = f(z)\ , z = g(x)$	$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dz} \times \frac{dz}{dx}$

قاعدة المعادلة الوسيطة بالنسبة للزمن

$y = g(t), x = h(t)$	$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \div \frac{dx}{dt}$

الاشتقاق الضمني

خطوات الاشتقاق الضمني

1- الاشتقاق حسب القواعد مراعياً اشتقاق أي طرف فيه (y) حسب قاعدة السلسلة $\left(y` \ or \ \frac{dy}{dx}\right)$

2- ترتيب المعادلة بحيث تكون جميع الحدود التي تحوي $\left(y` \ or \ \frac{dy}{dx}\right)$ في طرف وباقي الحدود في طرف اخر

3- اخراج عامل مشترك من جهة الطرف التي تكون فيه $\left(y` \ or \ \frac{dy}{dx}\right)$

4- حل المعادلة بالنسبة $\left(y` \ or \ \frac{dy}{dx}\right)$

المشتقة الثانية للعلاقة الضمنية

1- نجد $\left(y` \ or \ \frac{dy}{dx}\right)$ كما في خطوات الاشتقاق الضمني

2- نشتق $\left(y` \ or \ \frac{dy}{dx}\right)$ كما في خطوات الاشتقاق الضمني فينتج $\left(y`` \ or \ \frac{d^2y}{dx^2}\right)$

المشتقة الثانية للمعادلة الوسيطة بالنسبة للزمن

1- نجد $\left(\frac{dy}{dx}\right)$ كما في قاعدة المعادلة الوسيطة بالنسبة للزمن ونبسطها

2- نجد المشتقة الثانية بالنسبة للزمن

$$y = g(t), x = h(t) \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \div \frac{dx}{dt} \Rightarrow \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dx}\right) \div \frac{dx}{dt}, \frac{dx}{dt} \neq 0$$

الاشتقاق اللوغاريتمي

خطوات الاشتقاق اللوغاريتمي

1- اخذ اللوغاريتم الطبيعي لطرفي المعادلة

2- استخدام قوانين وخصائص اللوغاريتمات لتبسيط المعادلة

3- الاشتقاق الضمني بالنسبة (x)

4- حل المعادلة الناتجة ووضع $(f(x))$ بدلا من (y)

امثلة على الاقترانات التي تحل بالاشتقاق اللوغاريتمي

$$y = x^x, y = x^{\sin x}, y = \sin^x x, y = x^{\sqrt{x}}$$

المشتقات العليا

1- رموز المشتقة الثانية

$$y``, f``(x), (f(x))``, \frac{d^2y}{dx^2}, \frac{d^2}{dx^2}(f(x))$$

2- رموز المشتقة النونية

$$y^{(n)}, f^{(n)}(x), (f(x))^{(n)}, \frac{d^ny}{dx^n}, \frac{d^n}{dx^n}(f(x))$$

امثلة على المشتقات المتكررة

$\boxed{y = xe^x}$	$\boxed{y = \sin x}$
$y` = e^x + xe^x$	$y` = \cos x$
$y`` = e^x + (e^x + xe^x) = 2e^x + xe^x$	$y`` = -\sin x$
$y``` = 2e^x + (e^x + xe^x) = 3e^x + xe^x$	$y``` = -\cos x$
$y^{(4)} = 3e^x + (e^x + xe^x) = 4e^x + xe^x$	$y^{(4)} = -(-\sin x) = \sin x$
$\boxed{y^{(4)} = 4e^x + xe^x}$	$\boxed{y^{(4)} = \sin x}$
$\therefore y^{(100)} = 100e^x + xe^x$	$\therefore y^{(100)} = \sin x$
$\therefore y^{(101)} = 101e^x + xe^x$	$\therefore y^{(101)} = \cos x$

قواعد اللوغاريتمات

الرقم	اللوغاريتم العادي $log(x), log_a(x)$ ، اللوغاريتم الطبيعي $ln(x)$	الرقم	اللوغاريتم العادي $log(x), log_a(x)$ ، اللوغاريتم الطبيعي $ln(x)$
1	$log(x.y) = log\, x + log\, y$	24	$ln\left(\frac{1}{h(x)}\right) = -\, ln\, h(x)$
2	$log_a(x.y) = log_a\, x + log_a\, y$	25	$log(\frac{x}{y}) = -\, log(\frac{y}{x})$
3	$log(h(x)g(x)) = log\, h(x) + log\, g(x)$	26	$log_a(\frac{x}{y}) = -\, log_a(\frac{y}{x})$
4	$log_a(h(x)g(x)) = log_a\, h(x) + log_a\, g(x)$	27	$log(\frac{h(x)}{g(x)}) = -\, log(\frac{g(x)}{h(x)})$
5	$ln(x.y) = \ln x + \ln y$	28	$log_a(\frac{h(x)}{g(x)}) = -\, log_a(\frac{g(x)}{h(x)})$
6	$ln(h(x)g(x)) = ln\, h(x) + ln\, g(x)$	29	$ln(\frac{x}{y}) = -\, ln(\frac{y}{x})$
7	$log(\frac{x}{y}) = log\, x - log\, y$	30	$ln(\frac{h(x)}{g(x)}) = -ln(\frac{g(x)}{h(x)})$
8	$log_a(\frac{x}{y}) = log_a\, x - log_a\, y$	31	$log(\sqrt{x}) = log(x^{\frac{1}{2}}) = \frac{1}{2} log\, x$
9	$log(\frac{h(x)}{g(x)}) = log\, h(x) - log\, g(x)$	32	$log_a(\sqrt{x}) = log_a(x^{\frac{1}{2}}) = \frac{1}{2} log_a\, x$
10	$log_a(\frac{h(x)}{g(x)}) = log_a\, h(x) - log_a\, g(x)$	33	$log(\sqrt{h(x)}) = log((h(x))^{\frac{1}{2}}) = \frac{1}{2} log\, h(x)$
11	$ln(\frac{x}{y}) = ln\, x - ln\, y$	34	$log_a(\sqrt{h(x)}) = log_a((h(x))^{\frac{1}{2}}) = \frac{1}{2} log_a\, h(x)$
12	$ln(\frac{h(x)}{g(x)}) = ln\, h(x) - ln\, g(x)$	35	$ln(\sqrt{x}) = ln(x^{\frac{1}{2}}) = \frac{1}{2} \ln x$
13	$log(x^n) = nlog\, x$	36	$ln(\sqrt{h(x)}) = ln((h(x))^{\frac{1}{2}}) = \frac{1}{2} ln\, h(x)$
14	$log_a(x^n) = nlog_a\, x$	37	$log(\sqrt[n]{x}) = log(x^{\frac{1}{n}}) = \frac{1}{n} log\, x$
15	$log((h(x))^n) = nlog\, h(x)$	38	$log_a(\sqrt[n]{x}) = log_a(x^{\frac{1}{n}}) = \frac{1}{n} log_a\, x$
16	$log_a((h(x))^n) = n\, log_a\, h(x)$	39	$log(\sqrt[n]{h(x)}) = log((h(x))^{\frac{1}{n}}) = \frac{1}{n} log\, h(x)$
17	$ln(x^n) = n \ln x$	40	$log_a(\sqrt[n]{h(x)}) = log_a((h(x))^{\frac{1}{n}}) = \frac{1}{n} log_a\, h(x)$
18	$ln((h(x))^n) = n\, ln\, h(x)$	41	$ln(\sqrt[n]{x}) = ln(x^{\frac{1}{n}}) = \frac{1}{n} \ln x$
19	$log(\frac{1}{x}) = -log\, x$	42	$ln(\sqrt[n]{h(x)}) = ln((h(x))^{\frac{1}{n}}) = \frac{1}{n} ln\, h(x)$
20	$log_a(\frac{1}{x}) = -log_a\, x$	43	$log(x) = \frac{log(x)}{log\, 10} = \frac{ln(x)}{ln\, 10}$
21	$log(\frac{1}{h(x)}) = -log\, h(x)$	44	$log_a(x) = \frac{log(x)}{log(a)} = \frac{ln(x)}{ln(a)}$
22	$log_a(\frac{1}{h(x)}) = -\, log_a\, h(x)$	45	$log(h(x)) = \frac{log(h(x))}{log\, 10} = \frac{ln(h(x))}{ln\, 10}$
23	$ln(\frac{1}{x}) = -\ln x$	46	$log_a(h(x)) = \frac{log(h(x))}{log(a)} = \frac{ln(h(x))}{ln(a)}$

خصائص اللوغاريتمات

الرقم	اللوغاريتم العادي $log(x), log_a(x)$ ، اللوغاريتم الطبيعي $ln(x)$	الرقم	اللوغاريتم العادي $log(x), log_a(x)$ ، اللوغاريتم الطبيعي $ln(x)$
1	$ln(e^x) = x$	7	$log_a(a^x) = x$
2	$ln(e^{h(x)}) = h(x)$	8	$log_a(a^{h(x)}) = h(x)$
3	$ln(e^{ln(x)}) = ln(x)$	9	$log(10) = 1$
4	$ln(e^{ln(h(x))}) = ln(h(x))$	10	$log_a(a) = 1$
5	$log_e(x) = ln(x)$	11	$log_a(1) = 0$
6	$log_e(h(x)) = ln(h(x))$	12	$ln(e) = 1$

العلاقة بين الاقترانات اللوغاريتمية والاقترانات الاسية

الرقم	اللوغاريتم العادي $log(x), log_a(x)$ ، اللوغاريتم الطبيعي $ln(x)$	الرقم	الاس العادي a^x ، الاس الطبيعي e^x
1	$log(x) = y \Longrightarrow x = 10^y$	4	$log_a(h(x)) = y \Longrightarrow h(x) = a^y$
2	$log_a(x) = y \Longrightarrow x = a^y$	5	$ln(x) = y \Longrightarrow x = e^y$
3	$log(h(x)) = y \Longrightarrow h(x) = 10^y$	6	$ln(h(x)) = y \Longrightarrow h(x) = e^y$

بعض قوانين الأسس للاقترانات الاسية

الرقم	الاس العادي a^x ، الاس الطبيعي e^x	الرقم	الاس العادي a^x ، الاس الطبيعي e^x
1	$a^{xy} = (a^x)^y$	7	$a^x = e^{x\,ln(a)}$
2	$e^{xy} = (e^x)^y$	8	$a^{x-y} = \frac{a^x}{a^y}$
3	$e^{ln(x)} = x$	9	$a^{x+y} = a^x \times a^y$
4	$e^{ln(h(x))} = h(x)$	10	$a^{-x} = \frac{1}{a^x}$
5	$10^{log(x)} = x$	11	$a^{log_a(x)} = x$
6	$10^{log(h(x))} = h(x)$	12	$a^{log_a(h(x))} = h(x)$

بعض الامثلة على الاقترانات الاسية والاقترانات الثابتة

الرقم	الاقترانات الثابتة	الرقم	الاقترانات الاسية
1	$f(x) = 1^x$	4	$f(x) = a^x$
2	$f(x) = e$	5	$f(x) = e^x$
3	$f(x) = \pi$	6	$f(x) = \pi^x$

التطبيقات الهندسية للمشتقة

1- المعادلة العامة للمستقيم (المماس) عند نقطة التماس (x_1, y_1) وميله (m) هي $y - y_1 = m(x - x_1)$

2- المعادلة العامة للمستقيم (العمودي على المماس) عند نقطة التماس (x_1, y_1) وميله $(m \perp)$ هي $y - y_1 = m \perp (x - x_1)$

3- المستقيمان المتوازيان لها نفس الميل ، المستقيمان المتعامدان حاصل ضرب ميلهما هو (-1) أي $(m \times m \perp = -1)$

4- نقطة التماس تحقق معادلة منحنى الاقتران ومعادلة مماسه ومعادلة العمودي على مماسه

5- ميل المماس يكون صفراً عندما يوازي المماس محور السينات (x) وتكون معادلة المماس هي $(y - y_1)$

6- ميل المماس يكون قيمة غير معرفة عندما يوازي المماس محور الصادات (y) وتكون معادلة المماس هي $(x = x_1)$ والتي تمثل الاحداثي السيني لنقطة التماس

7- ميل المماس بين نقطتين على منحنى اقتران او بين نقطة التماس ونقطة أخرى على المماس او منحنى الاقتران هي $\left(m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}\right)$

8- ميل المماس عند نقطة التماس (x_1, y_1) يساوي مشتقة معادلة المماس ومشتقة معادة منحنى الاقتران ويساوي $(m = f`(x))$

9- عند تعويض الاحداثي السيني لنقطة التماس في المشتقة يساوي الميل (m)

التطبيقات الفيزيائية للمشتقة

1- اقتران الازاحة $(s(t))$ عند اشتقاقه يعطي اقتران السرعة $\left(v(t) = \frac{ds}{dt}\right)$ وعند اشتقاقه يعطي اقتران التسارع $\left(a(t) = \frac{dv}{dt}\right)$

2- عند زمن صفر تكون السرعة ابتدائية والمسافة المقطوعة صفر والتسارع له قيمة ابتدائية

4- السرعة تكون صفرا عند اقصى ارتفاع في المقذوفات للأعلى و انعدام السرعة وتغيير الجسم لاتجاهه والتوقف والتحرك من السكون والسكون اللحظي

5- الازاحة تكون صفرا عند بداية الحركة وعند عودة الجسم لنقطة البداية

6- التسارع يكون صفرا اذا تحرك الجسم بسرعة منتظمة او ثابته او عند انعدام التسارع

7- السرعة موجبة عند حركة الجسم باتجاه القوة المؤثرة فيه وسالبة اذا كانت بعكس اتجاه القوة المؤثرة

8- التسارع موجب اما التباطؤ سالب